1 Представление функций алгебры логики с помощью дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) и его "геометрическая" интерпретация. Совершенная ДНФ, критерий единственция. Совершенная ДНФ, критерий единственности ДНФ

Для набора $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ длины n над множеством $[0, 2]$ через Γ_γ обозначим множество всех тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ куба B^n, для которых $\alpha_i = \gamma_i$ при всех $i \in [1, n]$ таких, что $\gamma_i \neq 2$. Множество Γ_γ называется ***гранью*** куба B^n, число $(n - r)$, равное числу "2"(т.е. не постоянных БП) в наборе γ, считается ***размерностью*** этой грани, а число r — ее ***рангом***.

Кроме того, ФАЛ f однозначно определяется своим ***характеристическим множеством***, которое состоит из всех на боров $\alpha \in B^n$ таких, что $f(\alpha) = 1$, и обозначается через N_f.

Функции x_i и x_i будем называть ***буквами*** БП x_i и, как обычно, будем считать, что $x^0 = x_i$, $x^1 = x_i$. Конъюнкция (дизъюнкция) r, $1 \leqslant r \leqslant n$, букв различных БП из множества $X(n)$ называется ***элементарной конъюнкцией*** (соответственно ***элементарной дизъюнкцией***) ***ранга r от булевых переменных*** $X(n)$.

Дизъюнкция различных элементарных конъюнкций называется ***дизъюнктивной нормальной формой*** **(ДНФ)**, а конъюнкция различных элементарных дизъюнкций — ***конъюнктивной нормальной формой*** **(КНФ)**. При этом ДНФ (КНФ) считается ***совершенной***, если все ее ЭК (соответственно ЭД) существенно зависят от одних и тех же БП, а их ранг ра-вен числу этих БП. Число ЭК (ЭД) в ДНФ (соответственно КНФ) $\mathfrak{A}$ называется ее ***длиной*** и обозначается через $\lambda(\mathfrak{A})$.

Лемма 2.1. *Совершенная ДНФ ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, является единственной ДНФ от БП $X(n)$, которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.*

Следствие. *Совершенные ДНФ ФАЛ ℓ_n, ℓ_n являются единственными ДНФ этих ФАЛ от БП $X(n)$.*

2 Сокращённая ДНФ и способы её построения

ФАЛ f' ***имплицирует*** ФАЛ f'' $((f' \to f'') \equiv 1)$, если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$.

ФАЛ f'' ***поглощает*** ФАЛ f', если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$.

ФАЛ f' имплицирует ФАЛ $f'' \Leftrightarrow f'' = f' \vee f''$ или $f' = f' \cdot f''$.

ЭК K' имплицирует ЭК $K'' \Leftrightarrow K' = K'' \cdot K$, где K не имеет общих букв с K''.

ЭК K является ***импликантой*** ФАЛ f, если K имплицирует f.

ДНФ $\mathfrak{A}$ называется *ДНФ **без поглощений** ЭК*, если ни одна из граней $N_{K_1}, \ldots, N_{K_s}$ не содержится ни в одной из других граней покрытия $N_f = N_{K_1} \cup \ldots \cup N_{K_s}$. Или, другими словами, ни одна ЭК не является импликантой другой ЭК.

Импликанта K ФАЛ f называется ***простой импликантой*** f, если она не поглощается никакой другой отличной от неё импликантой f (т. е. не имплицирует никакую другую импликанту f). С «геометрической» т. з. простые импликанты f соответствуют максимальным по включению граням множества N_f.

Дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f называется её ***сокращённой*** *ДНФ*.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — сокращённые ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathfrak{A}$ — сокращённая ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.*

Следствие. *Если ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений получается из КНФ $\mathfrak{B}$ ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathfrak{A}$ — сокращённая ДНФ ФАЛ f.*

Метод Блейка позволяет получить сокращённую ДНФ ФАЛ f из произвольной ДНФ f.

ДНФ $\mathfrak{A}'$ называется ***расширением*** ДНФ $\mathfrak{A}$, если она получена путём выделения с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности подформул вида $x_i K' \vee \overline{x}_i K''$, применением к ним ***тождества обобщённого склеивания*** ($x_i K' \vee \overline{x}_i K'' = x_i K' \vee \overline{x}_i K'' \vee K' K''$) и последующим приведением подобных.

ДНФ $\mathfrak{A}'$ называется ***строгим расширением*** ДНФ $\mathfrak{A}$, если она является расширением $\mathfrak{A}$ и содержит ЭК, не являющуюся импликантой ни одной ЭК из $\mathfrak{A}$.

Теорема. *ДНФ без поглощений ЭК является сокращённой ДНФ $\Leftrightarrow$ когда она не имеет строгих расширений.*

Следствие. *Из любой ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f можно получить сокращённую ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.*

3 Тупиковая ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в тупиковые ДНФ и его локальность.

ДНФ $\mathfrak{A}$, реализующая ФАЛ f, называется ***тупиковой** ДНФ*, если $f \neq \mathfrak{A}'$ для любой ДНФ $\mathfrak{A}'$, полученной из $\mathfrak{A}$ в результате удаления некоторых букв или целых ЭК.

Минимальная ДНФ — ДНФ, имеющая минимальный ранг среди ДНФ реализующих f.

Кратчайшая ДНФ — ДНФ, имеющая минимальную длину среди ДНФ реализующих f.

Минимальная ДНФ всегда является тупиковой, среди кратчайших обязательно найдётся тупиковая.

ДНФ ***пересечение тупиковых*** (ДНФ $\cap T$) ФАЛ f - дизъюнкция всех тех различных простых импликант этой ФАЛ, которые входят в любую тупиковую ДНФ ФАЛ f.

Набор α называется ***ядровой точкой*** ФАЛ f, если $\alpha \in N_f$ и α входит только в одну максимальную грань ФАЛ f. При этом грань N_K, являющаяся максимальной гранью ФАЛ f и содержащая точку α, называется ***ядровой гранью*** ФАЛ f. Совокупность всех различных ядровых граней ФАЛ f называется ***ядром*** ФАЛ f.

Лемма. *ДНФ $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f, которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ f.* ***Док-во***: часть 1, стр. 32

ДНФ ***сумма тупиковых*** (ДНФ Σ T) ФАЛ f - дизъюнкция всех тех различных простых импликант этой ФАЛ, которые входят в хотя бы в одну тупиковую ДНФ ФАЛ f.

ФАЛ называется ***ядровой***, если все её максимальные грани являются ядровыми.

Следствие. *Сокращённая ДНФ ядровой ФАЛ является её единственной тупиковой ДНФ.*

ДНФ, получающаяся из сокращённой ДНФ ФАЛ f удалением тех ЭК K, для которых грань N_K покрывается ядром ФАЛ f, но не входит в него, называется ***ДНФ Квайна*** этой ФАЛ.

ДНФ $\cap T \subseteq$ ДНФ $\Sigma T \subseteq$ ДНФ Квайна $\subseteq$ сокращённая ДНФ.

Для $\alpha \in N_f$ обозначим через $\Pi_\alpha(f)$ множество всех проходящих через α максимальных граней ФАЛ f, будем называть его ***пучком ФАЛ f через точку α***.

Точку α будем называть ***регулярной точкой*** ФАЛ f, если найдётся точка $\beta \in N_f$, для которой имеет место строгое включение $\Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$.

Грань N_K ФАЛ f называется ***регулярной гранью*** этой ФАЛ, если все точки N_K регулярны.

Теорема. *Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT $\Leftrightarrow$ когда грань N_K <u>не</u> является регулярной гранью этой ФАЛ.* ***Док-во***: часть 1, стр. 35-36

4 Особенности ДНФ линейных и монотонных ФАЛ. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ.

ФАЛ f ***линейно зависит от БП*** x_i (x_i является ***линейной*** *БП* f), если $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для любых соседних по x_i наборов α и β.

Равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \oplus f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ равносильно линейности по БП x_i ФАЛ f.

ФАЛ f является линейной $\Leftrightarrow$ когда она линейно зависит от всех своих существенных БП.

Если ФАЛ f линейно зависит от БП x_i, то в любую импликанту этой ФАЛ входит одна из букв x_i, $\overline{x}_i$.

ФАЛ f называется ***монотонной***, если $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ для любых наборов α и β таких, что $\alpha \leqslant \beta$.

ФАЛ f *монотонно зависит от БП* x_i (x_i является *монотонной БП* ФАЛ f), если $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ для любых соседних по x_i наборов α и β таких, что $\alpha \leqslant \beta$.

ФАЛ является монотонной $\Leftrightarrow$ когда она монотонно зависит от всех своих БП.

Если ФАЛ f монотонно зависит от БП x_i, то ни одна из её простых импликант не содержит букву $\overline{x}_i$.

ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ зависит от БП x_i *инмонотонно* (*инконъюнктивно*, *индизъюнктивно*), если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \overline{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ зависит от x_i монотонно (соответственно конъюнктивно, дизъюнктивно).

Набор α называется *нижней единицей* монотонной ФАЛ f, если $\alpha \in N_f$ и $\forall \beta \neq \alpha, \beta \leqslant \alpha$ выполняется $f(\beta) = 0$. Множество всех нижних единиц монотонной ФАЛ f обозначается N_f^+.

Лемма. *Сокращённая ДНФ $\mathfrak{A}$ монотонной ФАЛ f является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид*
$$\mathfrak{A} = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+.$$
При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f.

Замечание. *Можно сказать, что сокращённая ДНФ монотонной ФАЛ состоит из её простых импликант, не содержащих отрицаний и соответствующих нижним единицам.*

Следствие. *Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.*

i-я строка M ***покрывает*** её j-й столбец, если $M\langle i, j\rangle = 1$.

Система строк с номерами из I образует ***покрытие матрицы*** M, если каждый её столбец покрывается хотя бы одной строкой с номером из I. Аналогично понимается покрытие одного множества строк M другим множеством строк.

Покрытие матрицы M, в котором ни одна строка не покрывается другой строкой называется ***неприводимым***. Покрытие, не имеющее собственных подпокрытий, называется *тупиковым*.

ФАЛ $F(y)$ называется ***функцией покрытия*** матрицы M без нулевых столбцов, если $F(\beta) = 1 \Leftrightarrow$ когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta) = \{i | \beta\langle i\rangle = 1\}$ образует её покрытие.

Лемма. *Функция покрытия $F(y_1, \ldots, y_p)$ матрицы $M \in B^{p,s}$ без нулевых столбцов задаётся КНФ вида*
$$F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} \Big(\bigvee_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ M\langle i,j\rangle = 1}} y_i \Big).$$

Док-во: часть 1, стр. 41-42

Следствие. *В результате раскрытия скобок и приведения пободных из КНФ для F (см. лемму) можно получить сокращённую ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M.*

5 Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о «протыкающих» наборах. Исполь-зование градиентного алгоритма для построения ДНФ.

Градиентный алгоритм ориентирован на выделение из заданного покрытия достаточно «коротких» подпокрытий или, иначе, на построение достаточно «коротких» покрытий для заданной матрицы.

Шаг: в матрице выбирается и включается в покрытие такая строка, которая покрывает наибольшее число ещё не покрытых столбцов (если таких строк несколько, из них выбирается строка с наименьшим номером).

Останов: после того шага, на котором получилось покрытие.

Теорема. *Пусть для действительного γ, $0 < \gamma \leqslant 1$, в каждом столбце матрицы $M \in M^{p,s}$ имеется не меньше чем $\gamma \cdot p$ единиц. Тогда покрытие матрицы M, получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше чем $\lceil \frac{1}{\gamma} ln^+(\gamma s) \rceil + \frac{1}{\gamma}$, где $ln^+(x) = 0$ при $0 < x < 1$ и $ln^+(x) = ln(x)$ при $x \geqslant 1$.*

Задача о «протыкании» системы $\mathfrak{N}$, состоящей из подмножеств $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_p$ множества $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, заключается в нахождении такого подмножества множества $\mathcal{N}$, в котором $\forall i \in [1, p]$ имеется хотя бы один элемент из $\mathcal{N}_i$. Эта задача сводится к задаче о выделении подпокрытия из покрытия отрезка $[1, p]$ его подмножества-ми $I_1, \ldots, I_s$, где $I_i = \{j : \alpha_i \in \mathcal{N}_j\}$ при всех i, $i \in [1, s]$. Заметим, что матрица построенной таким образом системы подмножеств отрезка $[1, p]$ получается из матрицы системы $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ в результате транспонирования.

Лемма. *$\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$ в кубе B^n всегда найдётся подмножество мощности не более чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m.* ***Док-во***: часть 1, стр. 47

6 Задача минимизации ДНФ. Поведение функции Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ.

На множестве ДНФ задаётся неотрицательный ***функционал сложности*** ψ, обладающий свойством ***монотонности***, т. е. $\forall$ДНФ $\mathfrak{A}$ $\exists \psi(\mathfrak{A}) \geqslant 0 : \psi(\mathfrak{A}') \geqslant \psi(\mathfrak{A}'')$, если ДНФ $\mathfrak{A}''$ получается из ДНФ $\mathfrak{A}'$ удалением букв или ЭК.

Примеры: длина $\lambda(\mathfrak{A})$, ранг $R(\mathfrak{A})$, «формульная» сложность $L(\mathfrak{A})$.

Задача минимизации *ДНФ* относительно функционала сложности ψ состоит в нахождении для заданной ФАЛ f ДНФ $\mathfrak{A}$, такую что $\psi(\mathfrak{A}) = \min \psi(\mathfrak{A}')$, где минимум берётся по всем ДНФ $\mathfrak{A}'$ ФАЛ f.

При этом ДНФ $\mathfrak{A}$ называется ***минимальной относительно функционала*** ψ или ***ψ-минимальной*** ДНФ. Значение $\psi(\mathfrak{A})$ называется ***сложностью ФАЛ f относительно функционала*** ψ или ***ψ-сложностью*** *ФАЛ f* в классе ДНФ.

λ-минимальную (по длине) ДНФ будем называть ***кратчайшей***, а R-минимальную (по рангу) — просто ***минимальной***.

Функция Шеннона для класса ДНФ относительно функционала ψ: $\psi(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} \psi(f)$.

Лемма. *$\forall n \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения $\lambda(n) = 2^{n-1}$, $R(n) = n \cdot 2^{n-1}$.*

Рассмотрим отрезок $[\psi'(n), \psi''(n)]$, в который попадают значения $\psi(n)$ для почти всех ФАЛ $f \in P_2(n)$. Если границы $\psi'(n)$ и $\psi''(n)$ асимптотически равны $\psi(n)$, то говорят, что для параметра ψ имеет место *эффект Шеннона*.

Для параметров λ и R эффект Шеннона отсутствует.

Лемма 7.2. *Для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства:*

$$\lambda(f) \leqslant \frac{3}{4} 2^{n-1} \left(1 + O\left(n \cdot 2^{-n/2}\right)\right), \qquad \lambda(f) \leqslant \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} \left(1 + O\left(n \cdot 2^{-n/2}\right)\right)$$

7 Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлёва о ДНФ сумма минимальных.

Функция Шеннона для параметра ψ в классе ДНФ: $\psi(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} \psi(f)$.

Обозначим значение функции Шеннона для следующих параметров: число тупиковых ДНФ — $\tau(n)$, число минимальных ДНФ — $\mu(n)$ и длина сокращённой ДНФ у ФАЛ из $P_2(n)$ — $\lambda_{\text{сокр.}}(n)$ (ДНФ рассматриваются с точностью до перестановки ЭК и букв в них).

Лемма. *Для ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geqslant 4$, вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \cdots \oplus x_n)$, где $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$, число тупиковых (минимальных) ДНФ равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).* **Следствие.** $\tau(n) \geqslant 5^{2^{n-4}}$, $\mu(n) \geqslant 2^{2^{n-4}}$. ***Док-во***: часть 1, стр. 53

Выберем множество номеров $I \subseteq [0, n]$, зафиксируем объединение всех слоёв куба B^n с номерами из I, обозначим характеристичесую функцию этого объединения как $\mathfrak{s}^I{}_n$. Числа из I назовём ***рабочими числами*** ФАЛ $\mathfrak{s}^I{}_n$.

ФАЛ $\mathfrak{s}^I{}_n$ является ***симметрической,*** т. е. не изменяет своё значение при любой перестановке аргументов. Наоборот тоже верно: любая симметрическая ФАЛ совпадает с одной из ФАЛ вида $\mathfrak{s}^I_n$.

Симметрическая ФАЛ является *поясковой*, если её рабочие числа образуют отрезок. Вид её сокращённой ДНФ: $\mathfrak{s}^{[r,p]}_n(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n+r-p} \leqslant n \\ \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n+r-p} = r}} x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_{n+r-p}}^{\sigma_{n+r-p}}$.

Поясковой ФАЛ является, в частности, ФАЛ голосования $H(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{s}_3^{[2,3]}$ а также ФАЛ $g = \mathfrak{s}_3^{[1,2]}$, показанная на рис.

x_1	0	$\overline{x}_1$	x_1	1
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

Лемма. $\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geqslant e_1 \frac{3^n}{n}$, *где e_1 — некоторая константа.*

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *цепной (циклической) функцией длины t*, если её сокращённая ДНФ с «геометрической» т. з. представляет собой цепь (соответственно цикл) из t последовательно соединённых рёбер $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_t$ куба B^n.

Теорема. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, *в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.*

8 Формулы, их структура, эквивалентность и способы задания. Оптимизация подобных формул по глубине

Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть Б $= \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_b\}$ — базис, где ФАЛ φ_i, $i = 1, \ldots, b$, зависит от k_i, $k_i \geqslant 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geqslant 2$. Предполагается, что Б — полный базис и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом Б$_0 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Любая переменная x_j из $\mathcal{X}$ считается ***формулой глубины* 0** или, иначе, ***тривиальной формулой над базисом* Б**, которая реализует функцию x_j . Если $i \in [1, b]$ и для каждого j, $j \in [1, k_i]$, определена формула $\mathcal{F}_j$ глубины q_j над Б, которая реализует ФАЛ f_j, то запись $\mathcal{F}$ вида $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$ является ***формулой глубины q над Б***, где $q = \max\{q_1, \ldots, q_{k_i}\} + 1$, кот. реализует ф-цию f вида $f = \varphi_i(f_1, \ldots, f_{k_i})$.

Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются ***формулами над базисом* Б**. При этом формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы $\mathcal{F}$, называются ее ***подформулами***, а те подформулы $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i}$, из которых на последнем шаге индуктивного построения строится формула $\mathcal{F}$ (см. выше), считаются ее ***главными*** подформулами.

Под ***сложностью*** (***рангом***) формулы $\mathcal{F}$ понимается число вхождений в нее функциональных символов (соответственно символов переменных), которое обозначается через $L(\mathcal{F})$ (соответственно $R(\mathcal{F})$).

Графически совпадающие формулы считаются ***изоморфными***, а формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$, реализующие равные функции f' и f'', называются ***равными*** или, иначе, ***эквивалентными***. При этом равенство вида $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ считается ***тождеством***.

Лемма 2.1. *Для формулы* $\mathcal{F}, \mathcal{F} \in \mathfrak{U}^{\Phi}$, *выполняются неравенства* $R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1 \leqslant L(\mathcal{F}) + 1 \leqslant 2^{D(\mathcal{F})}$, *где* $L_{\&,\vee}(\mathcal{F})$ *-число ФС & и* $\vee$ *в формуле* $\mathcal{F}$.

Док-во: часть 2, стр. 19 **Следствие.** $D(\mathcal{F}) \geqslant \lceil \log (L(\mathcal{F}) + 1) \rceil$.

Формулы из $\mathfrak{U}^{\Phi}$, получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств $t^{\text{К}}_{\&}$ и $t^{\text{К}}_{\vee}$, а также тождеств $t^{\text{А}}_{\&}$ и $t^{\text{А}}_{\vee}$, называются ***подобными***.

Формула, в которой все ФС $\neg$ встречаются только над БП, называется ***формулой с поднятыми отрицаниями.*** Преобразования подобия и эквивалентные преобразования формул на основе тождеств де Моргана не изменяют ранг этих формул и, следовательно, число ФС $\{\&, \vee\}$ в них.

Альтернирование $\mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями - максимальное число изменений типов ФС & и $\vee$ в цепях дерева, соответствующего формуле $\mathcal{F}$. Заметим, что альтернирование ЭК или ЭД равно нулю, а альтернирование любой (отличной от ЭК и ЭД) ДНФ или КНФ равно 1.

Теорема 2.1. *Для любой формулы* $\mathcal{F}$ *с поднятыми отрицаниями из* $\mathfrak{U}^{\Phi}$ *существует подобная ей формула* $\check{\mathcal{F}}$ *такая,что* $D(\check{\mathcal{F}}) \leqslant \lceil \log (L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \mathrm{Alt}\,(\mathcal{F})$.

Док-во: часть 2, стр. 21-23.

Следствие 1. *Для любой ЭК или ЭД* K *существует подобная формула* $\check{K}$ *такая, что* $D(\check{K}) = \lceil \log (L(K) + 1) \rceil$, *которая, минимальна по глубине.*

Следствие 2. *Для любой ДНФ или КНФ* $\mathfrak{A}$ *существует подобная ей формула* $\check{\mathfrak{A}}$ *такая, что* $D(\check{\mathfrak{A}}) \leqslant \lceil \log (L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1$.

9 Задание формул графами, схемы из функциональных элементов. Оценка числа формул и схем в базисе {&, $\vee$, $\neg$}

Схемой из функциональных элементов над базисом Б называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть Σ, входная выборка которой состоит из всех истоков Σ, а вершины помечены следующим образом:

1. каждому входу (выходу) Σ сопоставлена БП из $\mathcal{X}$ (со-ответственно $\mathcal{Z}$), являющаяся пометкой связанной с ним вершины, причем различным входам (выходам) сопоставлены различные БП, а упорядоченность вер-шин во входной и выходной выборках Σ определяется упорядоченностью сопоставленных им БП;
2. каждая отличная от истока вершина v схемы Σ **помечена** ФС φ_i, где $k_i = d^{+}_{\Sigma}(v)$.

Две СФЭ считаются изоморфными, если они изоморфны как помеченные графы, и эквивалентными, если они реализуют равные системы ФАЛ. В соответствующих друг другу вершинах изоморфных (квазиизоморфных) СФЭ реализуются одинаковые (соответственно подобные) формулы, а значит, и одинаковые ФАЛ. Следовательно, две изоморфные (квазиизоморфные) СФЭ эквивалентны.

Также как и для формул, для каждой СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$, определим следующие параметры (функционалы сложности):

1. $L(\Sigma)$ — ***сложность*** Σ, то есть число всех ее ФЭ;
2. $D(\Sigma)$ — ***глубина*** Σ, то есть максимальная глубина ее вершин.
3. $R(\Sigma)$ — ***ранг*** Σ, то есть число дуг,исходящих из ее входов.

Лемма 3.1. *Для приведенной СФЭ* Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{C}$, *с одним выходом, выполн. нер-ва* $R(\Sigma) \leqslant L_{\&,\vee}(\Sigma) + 1 \leqslant L(\Sigma) + 1 \leqslant 2^{D(\Sigma)}$, *где* $L_{\&,\vee}$ *- число ФЭ & и* $\vee$ *в* Σ.

Имеет место включение $\mathcal{U}^{\Phi}[D, n] \subseteq \mathcal{U}^{\Phi}\left(2^{D} - 1, n\right)$.

Лемма 3.2. *Для любых натуральных* n, L, D *выполняются неравенства*:

$$\left|\mathcal{U}^{\Phi}(L, n)\right| \leqslant (10n)^{L+1},$$
$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}(L, n)\right\| \leqslant (8n)^{L+1},$$
$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}[D, n]\right\| \leqslant (8n)^{2^{D}}.$$

Док-во: часть 2, стр. 30-31

Следствие 1. *Число попарно не квазиизоморфных формул с поднятыми отрицаниями от БП* $X(n)$ *ранга не больше, чем* R, *не превосходит* $(12n)^{R}$.

Лемма 3.3. *Для любых натуральных* n *и* L *выполняется неравенство*

$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}(L, n)\right\| \leqslant (8(L+n))^{L+1}$. ***Док-во***: часть 2, стр. 31-32

10 Контактные схемы и π-схемы, оценка их числа. Особенности функционирования многополюсных схем

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов, а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой x_i $(\overline{x}_i)$ называется ***замыкающим*** (соответственно ***размыкающим***) контактом БП x_i.

Сеть Σ с входами $a'_1, \ldots, a'_p$ и выходами $a''_1, \ldots, a''_q$, в которой все ребра (дуги) помечены переменными $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаниями $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$, называется ***(p, q)-контактной схемой* (КС)** *от БП* $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a'_1, \ldots, a'_p; a''_1, \ldots, a''_q)$. При этом число контактов называется ***сложностью*** КС Σ и обозначается через $L(\Sigma)$.

Рассмотрим теперь некоторые оценки числа контактных схем различных типов. Пусть $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ и $\mathcal{U}^{\pi}$ — множество всех КС из неориентированных контактов и множество всех π-схем соответственно. Если $\mathcal{U}^{\mathrm{A}}$ — один из указанных классов схем, то через $\mathcal{U}^{\mathrm{A}}(L, n)$ будем обозначать множество приведенных (1, 1)-схем Σ из $\mathcal{U}^{\mathrm{A}}$ от БП $X(n)$, для которых $L(\Sigma) \leqslant L$.

Лемма 4.2. *При любых натуральных* L *и* n *выполняется неравенство*

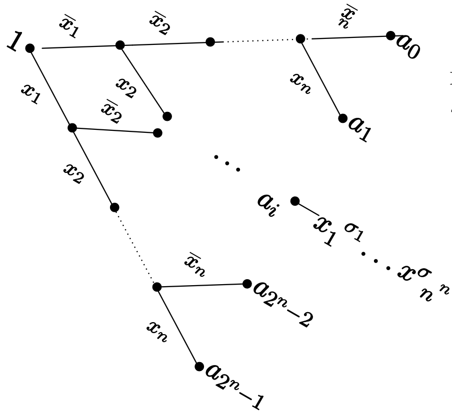
$\left\|\mathcal{U}^{\pi}(L, n)\right\| \leqslant (12n)^{L}$. ***Док-во***: часть 2, стр. 42

Лемма 4.3. *При любых натуральных* L *и* n *выполняется неравенство*

$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L, n)\right\| \leqslant (8nL)^{L}$. ***Док-во***: часть 2, стр. 42-43

Любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица F, $F \in (P_2(n))^{m,m}$, реализуется КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, которая представляет собой объединение всех КС $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, \ldots, x_n; a_i, a_j)$, где $1 \leqslant i < j \leqslant m$, а КС Σ_{ij} является π-схемой и построена по совершенной ДНФ ФАЛ $F\langle i, j\rangle$ и считается ***канонической КС матрицы*** $\boldsymbol{F}$.

Пусть Σ — КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор из B^n. Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α, и снятия пометок с остальных ребер Σ. Для вершин v и u КС Σ введем ***функцию проводимости от вершины v к вершине u*** как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \ldots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v-u)$-цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u. Будем говорить также, что ФАЛ $g_{v,u}$ является *функцией достижимости вершины u из вершины v*, или, иначе, ***реализуется между вершинами v и u.***



$(1, 2^n)$-КС $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n; 1; a_0, \ldots, a_{2^n-1})$, которая называется $(1, 2^n)$-***контактным деревом порядка n*** от БП $X(n)$. Легко видеть, что в выходной вершине a_i, $i = 0, \ldots 2^n - 1$, этого контактного дерева (КД) реализуется ЭК

вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (i-1)$, и что ФАЛ про-водимости между любыми его выходами равна 0. Таким об-разом, $(1, 2^n)$-КД порядка n является дешифратором порядка n, то есть схемой, реализующей систему Q_n из всех ЭК ранга n от БП $X(n)$.

Схемы Σ' и Σ'' считаются, как обычно, ***изоморфными***, если изоморфны соответствующие им графы, и ***эквивалентными***, если они реализуют равные системы ФАЛ. Изоморфные КС, очевидно, эквивалентны.

Для множества C, состоящего из контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_r}^{\sigma_r}$ в КС Σ, определим его *функцию проводимости* $K(C)$ и *функцию отделимости* $J(C)$ как ФАЛ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}$ и $x_{i_1}^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\bar{\sigma}_r}$ соответственно. При этом множество C называется *проводящим* (*отделимым*), если $K(C) \neq 0$ ($J(C) \neq 1$), и *нулевым* (соответственно *единичным*) в противном случае.

$$K(C') \geqslant K(C) \quad \text{и} \quad J(C') \leqslant J(C), \ \text{если } C' \subseteq C.$$

Простейшей π-схемой считается любая (1, 1)-КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса. Если π-схемы Σ_1 и Σ_2 уже определены, то (1, 1)-КС Σ' (Σ''), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения тоже является π-схемой.

Лемма 4.1. *Любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^\Phi$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.*

Схема, моделируюшая совершенную ДНФ ФАЛ f, называется ***канонической*** КС для этой ФАЛ.

Будем называть $(1, m)$-КС ***приведенной***, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее вход и выходы. При этом КС $\widehat{\Sigma}$,

11 Операция суперпозиции и её корректность для некоторых типов схем. Каскадные и разделительные контактные схемы, лемма Шеннона.

Рассмотрим структурные преобразования схем, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется ***тождественной вершиной кратности*** $\boldsymbol{k}$, $k \geqslant 0$, если она одновременно является k-кратным выходом данной схемы. При этом кратность один, как правило, не указывается, а тождественная вершины кратности 0 считается ***фиктивной***.

Простейшими видами суперпозиции схем являются: 1) операция ***переименования входов схемы*** с возможным их отождествлением; 2) операция ***переименования выходов схемы*** с возможным их дублированием или снятием; 3) операция ***объединения схем***, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, понимаемая, как обычное объединение соответствующих графов.

Будем говорить, что схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, то есть является ***суперпозицией схем*** Σ'' *и* Σ' без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ'. Указанная суперпозиция считается ***бесповторной***, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ'. Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется ***стыковкой***, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ' и каждый вход Σ'' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Для суперпозиции схем вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ характерно, как правило, то, что схема Σ реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или части) функций, реализованных схемой Σ' вместо (всех или части) входных переменных схемы Σ''. Суперпозиция $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ считается ***правильной***, если схема Σ обладает указанным свойством, и ***корректной***, если, кроме того, в любой вершине Σ, которая соответствует выходной вершине Σ', реализуется та же самая функция, что и в Σ'.

Каскадная КС - приведенная КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается ***полной***, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется ***неполной вершиной*** этой ККС. Будем говорить, что ККС Σ'' является ***дополнением*** неполной ККС Σ', если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом, очевидно, $L\left(\Sigma''\right) \leqslant 2L\left(\Sigma'\right)$, а объединение Σ' и Σ'' является полной ККС. Дополнение Σ'' к полной ККС Σ с 1 входом будем называть ***инверсной к*** Σ' ККС. Заметим, что ККС Σ'', в силу отмеченных выше свойств полных ККС, реализует систему ФАЛ $\overline{F}'$, если ККС Σ' реализует систему ФАЛ F'.

Лемма 5.1. *Если $(1,m)$-ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \ldots, f'_m)$, то существует $(1,m)$-ККС Σ'', которая реализует систему ФАЛ $\overline{F}' = \left(\overline{f}'_1, \ldots, \overline{f}'_m\right)$ и для которой $L(\Sigma'') \leqslant 2L(\Sigma')$.*

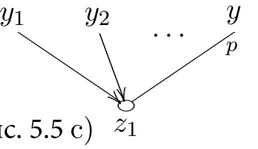


Рис. 5.5 с)

В соответствии с общими правилами стыковка (суперпозиция) КС вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется ***правильной***, если для матриц F, F' и F'', реализуемых КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно, выполняется равенство $F = F' \cdot F''$. Указанная суперпозиция считается *корректной*, если, кроме того, в выходных вершинах подсхемы Σ'' схемы Σ реализуются те же самые столбцы ФАЛ, что и в самой схеме Σ. Аналогичным образом определяется правильность и корректность суперпозиции КС на заданном наборе значений управляющих БП.

Схема называется ***разделительной по входам (выходам)***, если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0. Так $(p, 1)$-схема $\Sigma'' = \Sigma''(y_1, \ldots, y_p; z_1)$, показанная на рисунке 5.5с, является разделительной по входам схемой, которая называется ***вентильной звездой порядка p***. Будем говорить, что КС Σ от БП $x_1, \ldots, x_n$ ***разделительна на наборе*** $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Лемма 5.2. *Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F, F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда $F \geqslant F' \cdot F''$ и $F = F' \cdot F''$, если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.* ***Док-во***: часть 2, стр. 55-57

Следствие 1. *В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ, $\Sigma = \Sigma''(\Sigma)$, которая соответствует выходу КС Σ', реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ', то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.*

Следствие 2. *Равенство (5.5) выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.*

15 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством *монотонности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geqslant \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер. Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе $\mathcal{U}$ как минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из $\mathcal{U}$, которые реализуют F. При этом схема Σ, принадлежащая классу $\mathcal{U}$, которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе $\mathcal{U}$ относительно функционала Ψ.

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда функционал Ψ совпадает с введенным в главе 2 функционалом L (D, R, и т. д.), будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ F*. Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно функционала сложности* Ψ. В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида $\mathcal{U}^{\text{А}}_{\text{Б}}$ (вида $\mathcal{U}^{\text{А}}$) будем обозначать через $\Psi^{\text{А}}_{\text{Б}}(F)$ (соответственно $\Psi^{\text{А}}(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через ${\Psi_{\text{Б}}}^{\text{А}}(n)$ (соответственно $\Psi^{\text{А}}(n)$).

$\Psi'(F) \leqslant \Psi''(F)$, если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$. В частности, $\Psi^{\text{С}}_{\text{Б}}(F) \leqslant \Psi^{\Phi}_{\text{Б}}(F)$, $\Psi^{\text{К}}(F) \leqslant \Psi^{\pi}(F)$

Для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем вы-полняются неравенства

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} L(f_i) \leqslant L(F) \leqslant \sum_{i=1}^{m} L(f)_i.$$

Лемма 1.1. *Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, и π-схема Σ_f, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:* $L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2n \cdot |N_f| - 1, \qquad L(\Sigma_f) \leqslant n\,|N_f|.$

Следствие 1. *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π-схемой сложности 2, а также формулой из $\mathcal{U}^{\Phi}$, имеющей сложность 2, выполняются неравенства* $L^{\text{C}}(n) \leqslant L^{\Phi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n+1} - 1,$

$$L^{\text{K}}(n) \leqslant L^{\pi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n}.$$

Следствие 2. *В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство*

$$D(n) \leqslant n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Лемма 1.2. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π-схема Σ_f и формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, которые реализуют f и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:*

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^n + |N_f| - 2,$$
$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Следствие. $L^{\pi}(n) \leqslant 2^{n+1} - 2, \quad L^{\Phi}(n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 4.$

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v, а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v, объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v. Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ *операции присоединения вершины v к вершине w*. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ.

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Для множества ФАЛ G, $G \subseteq P_2(n)$, через $\overrightarrow{G}$ будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества G, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$ будем называть *универсальной системой* порядка n.

Лемма 1.3. *Для каждого натурального n в $\mathcal{U}^{\text{C}}_{\text{Б}}$ существует СФЭ U_n, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$ и сложность которой равна $2^{2^n} - n$.*

Следствие. $L^{\text{C}}_{\text{Б}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \leqslant 2^{2^n} - n.$

16 Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Лемма 2.1. *Если ФАЛ $f(x_1,\ldots,x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то* $L^{\text{С}}(f) \geqslant n-1, \quad L^{\text{К}}(f) \geqslant n.$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i, $i \in [1,k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то $L^{\text{С}}(f) \geqslant n$ *(соотв.* $L^{\text{К}}(f) \geqslant n+k$*).*

Следствие.
$$L^{\text{С}}(\ell_n) \geqslant n, \qquad L^{\text{К}}(\ell_n) \geqslant 2n,$$
$$L^{\text{С}}(\mu_n) \geqslant 2^n+n, \quad L^{\text{К}}(\mu_n) \geqslant 2^n+2n.$$

Лемма 2.2. *Для системы $F=(f_1,\ldots,f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство* $L^{\text{К}}(F) \geqslant m$ *(соответственно* ${L_{\text{Б}}}^{\text{С}}(F) \geqslant m$*).*

Следствие
$$L^{\text{С}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\text{К}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n,$$
$$L^{\text{С}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\text{К}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n,$$
$$L^{\text{С}}_{\text{Б}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n}-n, \qquad L^{\text{К}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n}-2.$$

Лемма 2.3. *Для любого натурального n выполняются неравенства:* $L^{\text{С}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n + O(n\cdot 2^{\frac{n}{2}})$, $L^{\text{С}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^n + O(n\cdot 2^{\frac{n}{2}})$;

$L^{\text{К}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^{n+1}-2$; $\quad L^{\Phi}(\mu_n) \leqslant 2^{n+2}-3$;

$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 3\cdot 2^n - 2$,

$L^{\text{С}}(\ell_n) \leqslant 4n-4$, $\quad L^{\text{С}}(\bar{\ell}_n) \leqslant 4n-4+\left\lfloor \dfrac{1}{n} \right\rfloor$.

Следствие. $L^C(\overrightarrow{Q}_n) \sim L^C(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^n$.

Лемма 2.4. *Если система ФАЛ $F=(f_1,\ldots,f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то* $L^{\text{К}}(F) \geqslant 2^{1-n}\sum\limits_{j=1}^{m}\left|N_{f_j}\right|$.

Следствие. $L^{\text{К}}(J_n) \geqslant 2^{n+1}-2$.

Лемма 2.5. *Если для ФАЛ f, $f\in P_2(n)$, и для любого σ, $\sigma \in B$, ФАЛ $f_\sigma(x_1,\ldots,x_{n-1},\sigma) \not\equiv 0,1$, то*
$$L^{\text{С}}_{\&,\vee}(f) \geqslant \min\{L^{\text{С}}_{\&,\vee}(f_0), L^{\text{С}}_{\&,\vee}(f_1)\}+2.$$

След. 1. $L^{\text{С}}(\mu_n) \geqslant 2^{n+1}+n-1$. **След. 2.** $D(\mu_n) \geqslant n+1$.

17 Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения, метод Шеннона

Определим, далее, *каскадную* КС как приведенную КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается *полной*, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется *неполной вершиной* этой ККС. Будем говорить, что ККС Σ'' является *дополнением* неполной ККС Σ', если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС.

Дополнение Σ'' к полной ККС Σ с 1 входом будем называть *инверсной к* Σ' ККС. Заметим, что ККС Σ'', в силу отмеченных выше свойств полных ККС, реализует систему ФАЛ F', если ККС Σ' реализует систему ФАЛ F'. Таким образом, в силу (3.3) справедливо следующее утверждение

Лемма 3.1. *Если $(1, m)$-ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \ldots, f'_m)$, то существует $(1, m)$-ККС Σ'', которая реализует систему ФАЛ $\overline{F}' = \left(\overline{f}'_1, \ldots, \overline{f}'_m\right)$ и для которой $L(\Sigma'') \leqslant 2L(\Sigma')$.*

Лемма 3.2. *Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства:* $L^{\text{К}}(\ell_n^\sigma) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$, $L^{\text{К}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \leqslant 2 \cdot 2^{2^n}$, $L^{\text{К}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \leqslant 2^{n+2} - 6$.

Теорема 3.1. *Для функций Шеннона $L^{\text{К}}(n)$ и $L^{\text{С}}(n)$ выполнены соотношения:* $L^{\text{К}}(n) \lesssim 4\frac{2^n}{n}$, $L^{\text{С}}(n) \lesssim 8\frac{2^n}{n}$.

18 Нижние мощностные оценки функции Шеннона

Мощностной метод Шеннона основан на том, что число ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответ-ствующей функции Шеннона от аргумента n.

Обозначим че-рез $\mathcal{U}\,(\Psi,\, n)$ множество тех схем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализу-ют одну ФАЛ из $P_2\,(n)$ и для которых $\Psi\,(\Sigma) \leqslant \Psi$. Следую-щее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений: $\|\mathcal{U}\,(\Psi\,(n)\,, n)\| = 2^{2^n}$.

Верхние оценки, установленные ранее:

$$\|\mathcal{U}^{\pi}\,(L, n)\| \leqslant (12n)^{L},$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}[L, n]\right\| \leqslant (8n)^{2^D}.$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}\,(L, n)\right\| \leqslant (8\,(L+n))^{L+1},$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}\,(L, n)\right\| \leqslant (8n)^{L+1},$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}\,(L, n)\right\| \leqslant (8nL)^{L},$$

Лемма 4.1. *Для положительных действительных чисел a, y, q из неравенств* $a \log q > 1$, $(ay)^y \geqslant q$, *следует неравенство*

$$y \geqslant \frac{\log q}{\log\,(a \log q)} \left(1 + \frac{\log\log\,(a\log q)}{\log\,(ae\log q)}\right),$$

где e — основание натуральных логарифмов, а из неравенств $a > 1$, $a^y \geqslant q$ — неравенство $y \geqslant \dfrac{\log q}{\log a}$.

Теорема 4.1. *Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = 1, \ldots, 5$ и $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\varepsilon_i\,(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon_i\,(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства*

$$L^{\mathrm{C}}\,(f) \geqslant (1 + \varepsilon_1\,(n))\,\frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}\,(f) \geqslant (1 - \varepsilon_2\,(n))\,\frac{2^n}{\log n}, \quad L^{\pi}\,(f) \geqslant (1 - \varepsilon_4\,(n))\,\frac{2^n}{\log n},$$

$$L^{\mathrm{K}}\,(f) \geqslant (1 - \varepsilon_3\,(n))\,\frac{2^n}{n}, \qquad D\,(f) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon_5(n).$$

Следствие 1. $L^{\mathrm{C}}\,(n) \gtrsim \dfrac{2^n}{n}$, $\quad L^{\Phi}\,(n) \gtrsim \dfrac{2^n}{\log n}$, $\quad L^{\mathrm{K}}\,(n) \gtrsim \dfrac{2^n}{n}$, $L^{\pi}\,(n) \gtrsim \dfrac{2^n}{\log n}$.

19 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Указанное ДУМ G будем называть ДУМ, *связанным с разбиением* Π. Компоненты разбиения Π будем при этом называть *полосами* ДУМ G, а ФАЛ $\psi_1 = \chi_{\delta_1}, \ldots, \psi_p = \chi_{\delta_p}$ — его *характеристическими* ФАЛ.

Будем считать *стандартным* ДУМ *порядка* m и *высоты* s, где $s \leqslant 2^m$,

ДУМ ранга p, $p = \lceil 2^m/s \rceil$, связанное с разбиением $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ куба B^m на последовательные отрезки, для которого номер любого набора из множества π_i меньше номера любого набора из множества π_j, если $i < j$, и выполнены соотношения $s_1 = s_2 = \cdots = s_{p-1} = s$, $s_p = 2^m - (p-1)\, s \leqslant s$.

Лемма 5.1. *Для любых натуральных p, m и s, где $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$, существует стандартное ДУМ G порядка m и высоты s, которое является ДУМ ранга p и для которого:*

1) $\lambda = |G| \leqslant p 2^s$;
2) *система из p характеристических ФАЛ $\psi_1, \ldots, \psi_p$ ДУМ G обладает тем свойством, что для любой ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, и соответствующих ФАЛ $g_1, \ldots, g_p$ из G справедливо не только представление $g = g_1 \vee \ldots \vee g_p$, но и представление*

$$g = \psi_1 g_1 \vee \psi_2 g_2 \vee \cdots \vee \psi_p g_p$$

Теорема 5.1. *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathfrak{U}^{\mathrm{C}}$, такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right).$$

Следствие. $L^{\mathrm{C}}(n) \sim \dfrac{2^n}{n}$.

17 (начало)

Метод каскадов позволяет строить КС и СФЭ, многократно использующие «промежу-точные результаты».

Метод Шеннона позволяет строить КС и СФЭ и установить порядок роста функций Шеннона $L^{\mathrm{C}}(n)$ и $L^{\mathrm{K}}(n)$.

Метод Шеннона основан на разложении Шеннона по q переменным. При этом мы раскладываем функцию на подфункции от q переменных, которые в разложении домножаются на функции вида $x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$ от $(n-q)$ переменных. Все указанные подфункции от q переменных мы реализуем с помощью универсального многополюсника порядка q (т. е. схемы, которая реализует все функции от q переменных). Потом присоединяем к выходам универсального многополюсника, к q информационным входам мультиплексора порядка $(n-q)$, т. е. у него $(n-q)$ адресных переменных, с помощью которых «адресуются» конкретные функции, реализуемые универсальным многополюсником.

Полагаем $q = \lfloor \log_2(n - 2\log_2 n) \rfloor$.

---

19 (начало)

Метод О. Б. Лупанова позволяет строить СФЭ и установать асимптотику функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(n)$.

Множество ФАЛ $G \in P_2(m)$ называется *дизъюнктивно-универсальным множеством* (*ДУМ*) порядка m и ранга p, если любая ФАЛ $g \in P_2(m)$ м. б. представлена в виде $g = g_1 \vee \cdots \vee g_p$, где $g_i \in G$.

Метод О. Б. Лупанова также основан на разложении Шеннона по q переменным и также использует мультиплексор порядка $(n-q)$. Но подфункции от q переменных из разложения реализуются не универсальным многополюсником, а как дизъюнкция функций из ДУМ порядка q.

20 Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Синтез схем для некоторых дешифраторов и мультиплексоров.

Множество δ, $\delta \subseteq B^q$, называется *m-регулярным* множеством наборов куба B^q, если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все префиксы[1] длины m наборов из δ различны. Заметим, что m-регулярному множеству δ, $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $\psi(\beta) = \gamma$.

Лемма 6.1. *Для любых натуральных m, λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, либо с её отрицанием.*

Лемма 6.2 (ср. [14]). *Для $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполняются неравенства* $L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \leqslant 2^n + O\left(\dfrac{2^n}{n}\right)$,

$$L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \leqslant 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

Следствие. *Оценки леммы 6.2, следствия из леммы 2.2 и следствия из леммы 2.4 дают асимптотические равенства*

$$L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \sim 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

Лемма 6.3. *Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 2 \cdot 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right), L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \leqslant 2 \cdot 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$
$$D(\mu_n) \leqslant n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ μ_n и бесповторная по информационным БП формула $\mathcal{M}_n$ с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит $7 \cdot 2^n$.

Следствие. *Из полученных оценок в силу следствий из леммы 2.5 вытекает, что $L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}$, $D(\mu_n) = n + O(1)$.*

21 Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ.

Теорема 7.1 (ср. [14]). *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, в $\mathcal{U}^{\Phi}$ существует реализующая ее формула $\mathcal{F}_f$, для которой*
$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{2\log\log n + O(1)}{\log n}\right),$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leqslant n - \log\log n + 8 + o(1).$$

Следствие. *Из* (7.1) *и* (7.2), *с учетом нижних оценок, следствия из леммы 9.1, вытекает, что*
$$L^{\Phi}(n) \sim \frac{2^n}{\log n}, \quad D(n) = n - \log\log n \pm O(1).$$

22 Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем

Теорема 8.1 (ср. [14]). *Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что*
$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Следствие. *Из* (8.3) *с учетом нижней оценки* (4.13) *вы-текает, что* $L^{\mathrm{K}}(n) \sim \dfrac{2^n}{n}.$

23 Задача синтеза схем для функций из специальных классов. Асимптотически оптималь-ные методы синтеза схем из функциональ-ных элементов и контактных схем для функ-ций из некоторых классов

Следующее «мощностное» неравенство обобщает равенство (4.1) и вытекает непосредственно из определений:
$$\|\mathcal{U}(\Psi(\mathcal{Q}(n)), n)\| \geqslant |\mathcal{Q}(n)|.$$
Оно позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона $\Psi(\mathcal{Q}(n))$ на основе известной верхней оценки величины $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$.

Лемма 9.1. *Для класса ФАЛ $\mathcal{Q}$ такого, что $n = o\left(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\right)$ ($\log n = o(\log\log|\mathcal{Q}(n)|)$), выполняются следующие асимптотические неравенства*
$$L^{\mathrm{C}}(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}, \text{ (соотв. } L^{\mathrm{K}}(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\text{)}.$$

Следовательно, в силу леммы 9.1, отсюда вытекает, что

$$L^{\mathrm{C}}(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{K}}(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{n}.$$

Возьмем в качестве примера введенный выше класс ФАЛ $\mathcal{Q}$, состоящий из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП, и докажем, что $L^{\mathrm{C}}(\mathcal{Q}(n)) \lesssim \frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{n}$,

то есть, с учетом (9.4), установим для него асимптотику (9.5) вида $L^{\mathrm{C}}(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{3}{4}\cdot\frac{2^n}{n}$.

Для класса ФАЛ Q введём «мощностную» последовательность

$$\sigma_Q(n) = \frac{\log|Q(n)|}{2^n},$$

где $n = 1, 2, \ldots$. При этом из определения следует, что $0 \leqslant \sigma_Q(n) \leqslant 1$ для всех n, $n = 1, 2, \ldots$. Класс ФАЛ Q называется *ненулевым классом ФАЛ*, если $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sigma_Q(n) > 0$.

Рассмотрим следующие операции над ФАЛ:

1) добавление и изъятие фиктивных БП (переход к равной ФАЛ);
2) переименование БП без отождествления (переход к конгруэнтной ФАЛ);
3) подстановка констант 0, 1 вместо БП (переход к подфункции).

Множество ФАЛ Q, $Q \subseteq P_2$, называется *инвариантным классом ФАЛ*, если оно замкнуто относительно трёх указанных операций. Множества $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$ называются *тривиальными инвариантными классами.*

При этом инвариантным является класс $\widehat{S}$ — класс *квазисимметрических* ФАЛ, то есть функций, симметрических по всем своим существенным переменным.

Лемма 9.2. *Пусть Q — инвариантный класс ФАЛ. Тогда его мощностная последовательность $\sigma_Q(n)$ монотонно не возрастает и сходится к пределу*

$$\sigma_Q = \lim_{n\to\infty}\sigma_Q(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log|Q(n)|}{2^n},$$

где число σ_Q удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \sigma_Q \leqslant 1$.

Лемма9.3. *Для всякого инвариантного класса Q и n =1,2,...*

$$L^{\mathrm{C}}\big(Q(n)\big) \sim \sigma_Q\frac{2^n}{n} \ \textit{при}\ \sigma_Q>0, \quad L^{\mathrm{C}}\big(Q(n)\big) = o\Big(\sigma_Q\frac{2^n}{n}\Big)\ \textit{при}\ \sigma_Q=0.$$

24 Задача эквивалентных преобразований схем на примере формул. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

Эквивалентные преобразования (ЭП), то есть преобразования, не изменяющие функционирования схем.

Считается, что тождество $\widetilde{t}: \mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$ *выводится из системы тождеств* τ, и этот факт записывается в виде выводимости $\tau \mapsto t^{\sim}$ или $\tau \mid\!\rightrightarrows t^{\sim}$ в зависимости от числа использованных переходов.

Система тождеств τ называется *полной* для ЭП формул над Б, если для любых двух эквивалентных формул $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ над Б имеет место выводимость $\mathcal{F}' \mid\!\rightrightarrows \mathcal{F}''$.

$\tau^{\text{осн}} = \left\{t_{\&}^{\text{М}}, t_{\neg}^{\text{М}}, t_{\&}^{\text{А}}, t_{\&}^{\text{К}}, t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}\right\}$, $\tau^{\text{А}} = \left\{t_{\&}^{\text{А}}, t_{\vee}^{\text{А}}\right\}$, $\tau^{\text{К}} = \left\{t_{\&}^{\text{К}}, t_{\vee}^{\text{К}}\right\}$, $\tau^{\text{ОП}} = \left\{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\right\}$, $\tau^{\text{ПК}} = \left\{t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}, t_{1,\vee}^{\text{ПК}}\right\}$, $\tau^{\text{D}} = \left\{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{\vee,\&}^{\text{D}}\right\}$, $\widetilde{\tau}^{\text{осн}} = \left\{\tau^{\text{М}}, \tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}, \tau^{\text{ОП}}, \tau^{\text{D}}, \tau^{\text{ПК}}, t^{\text{П}}\right\}$.

Систему $\tau^{\text{осн}}$ будем называть *системой основных тождеств*, а систему $\tau^{\sim\text{осн}}$ — *расширенной системой основных тождеств*.

Лемма 1.1. *Система $\widetilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.*

Произвольную конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторя-ющиеся или противоположные буквы, будем называть *обоб-щенной* ЭК (ОЭК), а дизъюнкцию таких конъюнкций, со-держащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», — обобщенной ДНФ (ОДНФ). Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_1 \cdot x_1$ будем считать *канонической* ОЭК (соответственно *ка-нонической* ОДНФ), а совершенную ДНФ и формулу $x_1 \cdot x_1$ — *совершенными* ОДНФ.

Лемма 1.2. *Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.*

Теорема 1.1. *Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.*

Рис. 3.1: основные тождества для КС

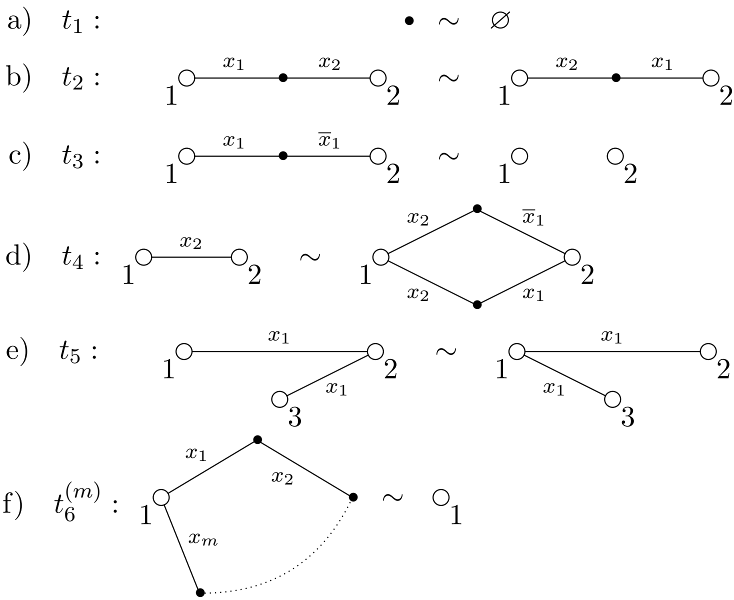
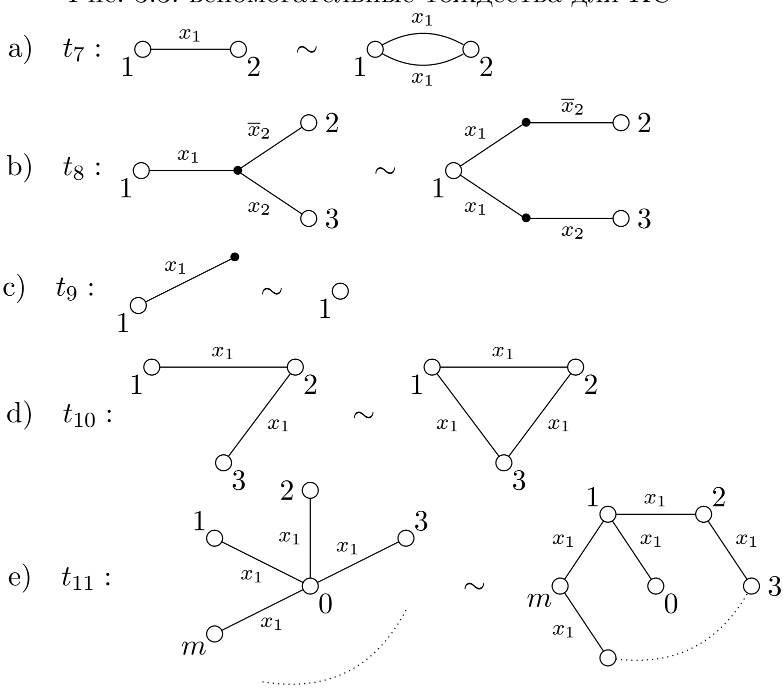


Рис. 3.3: вспомогательные тождества для КС

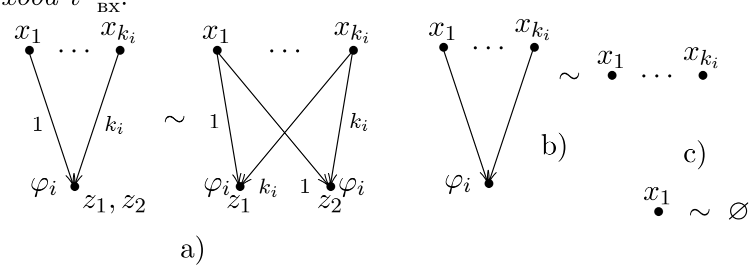


25 Эквивалентные преобразования схем из функ-циональных элементов и моделирование с их помощью эквивалентных преобразований фор-мул. Моделирование эквивалентных преоб-разований формул и схем в различных базисах, теорема перехода

Эквивалентность схем Σ' и Σ'' из $\mathcal{U}$ имеет место тогда и только тогда, когда Σ' и Σ'' реализуют равные си-стемы (матрицы) ФАЛ. При этом, обычно, предполагается, что соответствующие друг другу полюса (выходы, входы) в Σ' и Σ'' имеют одинаковые пометки, а эквивалентность Σ' и Σ'' записывается в виде тождества $t: \Sigma' \sim \Sigma''$.

Для схем из $\mathcal{U}$, как и для формул, определяется ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем, которые наз. *подстановками.* Тождество $\widehat{t}: \widehat{\Sigma}' \sim \widehat{\Sigma}''$, которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t: \Sigma' \sim \Sigma''$, на-зывается *подстановкой тождества* t. Схема Σ' называется *подсхемой схемы* Σ, если $V\left(\Sigma'\right) \subseteq V(\Sigma)$, $\quad E\left(\Sigma'\right) \subseteq E(\Sigma)$ и любая вершина v, $v \in V(\Sigma')$, которая либо относится к множеству входов (выходов) Σ, либо служит конечной (соот-ветственно начальной) вершиной некоторого ребра из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, является входом (соответственно выходом) Σ'.

На рис. 2.2a и 2.2b показаны тождество *ветвления* $t^{\mathrm{B}}_{\mathcal{E}_i}$ и тождество *снятия* $t^{\mathrm{C}}_{\mathcal{E}_i}$ *для функционального элемента* $\mathcal{E}_i$, $i \in [1, b]$, соответственно, а на рис. 2.2c — тождество *снятия входа* $t^{\mathrm{C}}{}_{\text{вх}}$.



Теорема 2.1. *Если τ — конечная полная система тож-деств для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, то $\left\{\underline{\tau}, \tau^{\mathrm{C}}, \tau^{\mathrm{B}}\right\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$.*

Следствие. *Система тождеств $\left\{\underline{\tau}^{\text{осн}}, \tau^{\mathrm{B}}, \tau^{\mathrm{C}}\right\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$.*

Рассмотрим далее вопросы структурного моделирования формул в различных базисах. Пусть помимо базиса $\text{Б} = \{\varphi_i\}_{i=1}^{b}$ у нас имеется другой конечный полный базис $\text{Б}' = \{\varphi'_i\}_{i=1}^{b'}$, и пусть формула $\Phi'_i\left(x_1, \ldots, x_{k'_i}\right)$ из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, где $k'_i \geqslant k_i$, реализует ФАЛ φ_i, $i = 1, \ldots, b$. Заметим, что в случае $k'_i > k_i$ БП $x_{k_i+1}, \ldots, x_{k'_i}$ являются фиктивными БП формулы Φ'_i. Положим $\Phi' = \left(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_b\right)$, $\quad \Pi' = \left(\Pi'_1, \ldots, \Pi'_b\right)$, где Π'_i — тождество вида $\varphi_i = \Phi'_i$, $i = 1, \ldots, b$, и формулы из Φ' (тождества из Π') будем называть *формулами* (соответственно *тождествами*) *перехода от базиса* Б *к базису* Б$'$.

Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, обозначим через $\Pi'(\mathcal{F})$ формулу над базисом Б$'$, которая получается из $\mathcal{F}$ заменой каждой ее подформулы вида $\varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$ формулой $\Phi'_i\left(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \ldots, x_{k'_i}\right)$, то есть является результатом подстановки формулы $\mathcal{F}_j$ вместо БП x_j в формулу Φ'_i для всех j, $j = 1, \ldots, k_i$. Переход от формулы $\mathcal{F}$ к формуле $\Pi'(\mathcal{F})$ будем называть *структурным моделированием формулы* $\mathcal{F}$ *в базисе* Б$'$ *на основе формул перехода* Φ' или, иначе, *на основе тождеств перехода* Π'.

Теорема 2.2 (теорема перехода). *Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса* Б *к базису* Б$'$ *и от базиса* Б$'$ *к базису* Б *соответственно. Тогда система тождеств* $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ *является КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$.*

Следствие. *Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$ (см. §3) указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе* Б.

26 Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств

В соответствии с **??** эк-вивалентность КС $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ и $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, то есть справедливость тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$ означает, что для любых i и j из отрезка $[1, m]$ ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ' равна ФАЛ проводи-мости от a_i к a_j в КС Σ''.

Определим подстановку для КС как переименование (с возможным отождествлением и инвертированием) БП, а также переименование (с возможным отождествлением и снятием) полюсов.

Это означает подсхемы Σ' КС Σ имеет ме-сто включение $V(\Sigma') \subset V(\Sigma)$ и $E(\Sigma') \in E(\Sigma)$, а полюсами Σ' являются все принадлежащие ей полюса КС Σи все те ее вершины, которые инцидентны в Σ ребрам из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$,
и, возможно, некоторые другие вершины.

Лемма 3.1. *Имеет место выводимость* $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \models\!\!\Rightarrow \{t_7 - -t_{11}\}$.

27

Теорема 4.1. *Для любых двух эквивалентных КС* Σ' *и* Σ'' *от БП* $x_1, \ldots, x_n$ *существует ЭП вида* $\Sigma' \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma''$.

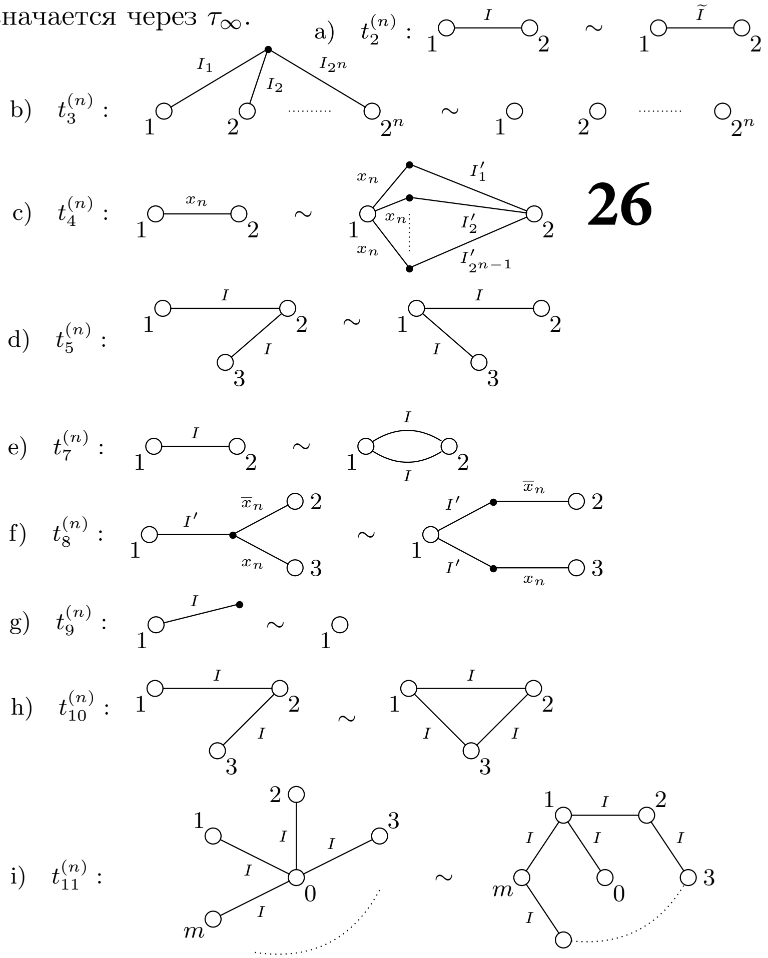
Следствие 1. *Система* τ_n *является КПСТ для ЭП КС из* $\mathcal{U}^{\text{К}}$ *от БП* $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие 2. *Система* τ_∞ *является ПСТ для ЭП КС из* $\mathcal{U}^{\text{К}}$.

Лемма 4.2. *Если* $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n) \underset{\{t_1 - t_5\}}{\Rightarrow} \Sigma''(x_1, \ldots, x_n)$, *то* $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, *а если* $\Sigma' \underset{\tau_k}{\Rightarrow} \Sigma''$, *где* $k < n$, *то* $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ *делится на* 2^{n-k}.

Теорема 4.2. *В классе* $\mathcal{U}^{\text{К}}$ *не существует конечной полной системы тождеств.*

Систему тождеств $\tau^{(n)} = \left\{t_1^{(n)}, \ldots, t_{11}^{(n)}\right\}$, где $t_1^{(n)} = t_1$, $t_6^{(n)}$ — соответствующее основное тождество (см. рис. 3.1f), $t_2^{(n)}$ — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 3.8a, где $\widetilde{I}$ — произвольная перестановка цепочки I, а остальные тождества приведены на рис. 3.8b—3.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка n*. При этом система $\tau_n = \left\{t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, \ldots, t_6^{(n)}\right\}$ считается системой основных тождеств порядка n, а система всех основных тождеств обозначается через τ_∞.



Лемма 3.2. *При $n \geqslant 2$ имеет место выводимость $\tau_n \rightrightarrows \tau^{(n)}$.*

27 Полнота системы основных тождестви отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Напомним (см. ??), что каноническая КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, или, иначе, *каноническая КС порядка n*, представляет собой объединение канонических $(1,1)$-КС вида $\widehat{\Sigma}_{ij}(x_1, \ldots, x_n; a_i, a_j)$, построенных на основе совершенных ДНФ ФАЛ проводимости от a_i к a_j для всех i и j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Любую цепь $I_i^{(n)}$ (см. §3), где $i \in [1, 2^n]$, а также любую цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ перестановкой контактов, будем называть *канонической цепью порядка n*. Заметим, что КС $\widehat{\Sigma}\,(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ является канонической КС порядка n тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1. любой контакт $\widehat{\Sigma}$ принадлежит некоторой канонической цепи порядка n, являющейся подсхемой схемы $\widehat{\Sigma}$, причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи;

2. любая внутренняя вершина $\widehat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта 1;

3. в КС $\widehat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» (см. тождество $t_6^{(n)}$) и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка n из пункта 1, которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;

4. в КС $\widehat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t (см. рис. 4.1a), влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс a_j с полюсом a_t (см. рис. 4.1b).

Лемма 4.1. *Для любой КС Σ, где $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ и $\Sigma = \Sigma\,(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}\,(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \underset{\tau_n}{\Rightarrow} \widehat{\Sigma}$.*

28 Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста

Пусть $(\Sigma, \text{И})$ — указанная выше модель ненадежной схемы Σ с возможными состояниями $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, в которых реализуются ФАЛ $f = f_1, f_2, \ldots, f_s$ соответственно от БП $X(n)$, определенные на множестве наборов $A = = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу M, $M \in B^{p,s}$, где $M\langle i, j\rangle = f_j(\alpha_i)$, считая, что i-й строке (j-му столбцу) этой таблицы соот-ветствует набор α_i (соответственно функция f_j и состоя-ние Σ_j). Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется *отделимой по столбцам* (соответственно *стро-кам*) матрицей. Заметим, что каждому классу неотличимых состояний модели $(\Sigma, \text{И})$ соответствует группа одинаковых столбцов матрицы M и рассмотрим отделимую по столбцам матрицу $\widehat{M}$, состоящую из всех различных столбцов матри-цы M. При этом будем считать, что каждый столбец матри-цы $\widehat{M}$ связан с соответствующим классом неотличимости со-стояний модели $(\Sigma, \text{И})$, и будем называть $\widehat{M}$ *таблицей кон-троля* данной модели. Для простоты будем, как правило, предполагать, что все состояния модели $(\Sigma, \text{И})$ попарно от-личимы, то есть, $M = \widehat{M}$. Это предположение, очевидно, не ограничивает общности рассуждений.

В частности, если $\mathcal{N}$ состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является *диагностика схемы*, а если $\mathcal{N} = \{(1, 2), \ldots, (1, t)\}$, то — *проверка исправности схемы*. Множество строк мат-рицы M с номерами из T, $T \subseteq [1, p]$, называется *тестом для матрицы M относительно множества* $\mathcal{N}$, или, иначе, *тестом для* $(M, \mathcal{N})$, если для любой пары (i, j) из $\mathcal{N}$ су-ществует t, $t \in T$, такое, что $M\langle t, i\rangle \neq M\langle t, j\rangle$. Мощность теста называется также его *длиной*.

Заметим, что множество, состоящее из всех строк табли-цы контроля, всегда образует тест. Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, назы-вается *тупиковым*, а тест, который имеет минимальную мощность, — *минимальным*. В том случае, когда целью кон-троля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется *диагностическим* (соответственно *проверяющим*).

Будем говорить, что множество наборов τ, $\tau \subseteq A$, обра-зует *тест для модели* $(\Sigma, \text{И})$ *относительно цели контро-ля* $\mathcal{N}$, или, иначе, *тест для* $(\Sigma, \text{И}, \mathcal{N})$, если соответствую-щие наборам из τ строки матрицы M образуют тест для $(M, \mathcal{N})$. Все введенные выше понятия, которые касаются те-стов для таблиц, без изменений переносятся на случай те-стов для ненадежных схем.

Рассмотрим ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует тест для $(M, \mathcal{N})$, и будем называть эту ФАЛ *функцией теста* для $(M, \mathcal{N})$.

Лемма 1.1. *Функция теста $f(y_1, \ldots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M, $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ*

$$f(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{N}} \Bigg(\bigvee_{\substack{1 \leqslant t \leqslant p \\ M\langle t,i\rangle \neq M\langle t,j\rangle}} y_t \Bigg), \qquad (1.1)$$

Следствие. *Каждая элементарная конъюнкция вида* $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$ *сокращенной ДНФ функции* $f\ (y_1, \ .\ .\ .\ , y_p)$*, получающаяся из КНФв результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством* $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$ *и обратно.*

Алгоритм построения всех тупиковых тестов для матрицы M относительно цели контроля $\mathfrak{N}$:

1. выписываем для функции теста КНФ вида (1.1);
2. раскрывая в ней скобки и приводя подобные, получаем сокращенную ДНФ функции теста;
3. сопоставляем каждой элементарной конъюнкции этой сокращенной ДНФ тупиковый тест.

Лемма 1.2. *Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множе-ства* $B^{p,s}$ *заключена в пределах от* $\lceil \log s \rceil$ *до* $(s-1)$*.*

Замечание. Указанные в лемме границы достигаются: ниж-няя — на любой отделимой по столбцам матрице из $B^{p,s}$, где $p = \lceil \log s \rceil$, а верхняя — на матрице из $B^{s-1,s}$, все столбцы которой различны и содержат не более одной единицы (обе матрицы имеют единственный диагностический тест, состо-ящий из всех строк).

Лемма 1.3. *Пусть* $\varphi\ (s)$, $t\ (s)$ *и* $p\ (s)$ — *целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента* s*, для которых*

$$t\,(s) = \lceil 2 \log s \rceil + \varphi\,(s)\,, \quad p\,(s) \geqslant t\,(s)\,, \quad \varphi\,(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \infty.$$

Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ *первые* $t\ (s)$ *строк образуют диагностический тест.*

Доказательство. Заметим, что все матрицы из $B^{p,s}$, где $p = p\ (s)$, у которых первые $t = t\ (s)$ строк образуют диагностический тест, отделимы по столбцам. Легко видеть также, что число таких матриц равно

$$2^t\left(2^t-1\right)\cdots\left(2^t-s+1\right)\cdot 2^{(p-t)s} \equiv 2^{ps}\left(1-\frac{1}{2^t}\right)\cdots\left(1-\frac{(s-1)}{2^t}\right),$$

а их доля среди всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ не меньше, чем

$$\left(1-\frac{1}{2^t}\right)\cdots\left(1-\frac{(s-1)}{2^t}\right) \geqslant 1-\frac{s^2}{2^t} \geqslant 1-2^{-2\varphi(s)},$$

и, следовательно, стремится к 1 при s стремящемся к беско-нечности. $\square$

Следствие. *Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции* $\varphi\ (s)$ *у почти всех отделимых по столбцам матриц из* $B^{p,s}$ *длина минимального диагности- ческого теста не больше, чем* $2 \log s + \varphi\ (s)$*.*

29 Самокорректирующиеся контактные схемы и методы их постороения. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем, корректирующих один обрыв (одно замыкание)

Рассмотрим вопрос повышения надежности схем на примере т. н. самокорректирующихся КС. Будем считать, что контакты рассматриваемых КС могут выходить из строя, переходя в одно из двух возможных неисправных состояний: состояние *обрыва*, когда контакт не проводит, и состояние *замыкания*, когда контакт проводит при любых значениях управляющей им БП.

Будем говорить, что КС Σ является (p, q) - самокорректирующейся КС или, иначе, корректирует p обрывов и q замыканий, где $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$, если любая КС Σ', которая может быть получена из КС Σ в результате обрыва не более чем p, и замыкания не более, чем q, контактов, эквивалентна Σ. Обозначим через $\mathcal{U}^K_{(p,q)}$ множество всех (p, q) - самокорректирующхся КС и заметим, что $\mathcal{U}^K_{(0,0)} = \mathcal{U}^K$.

Лемма 2.1. *Для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС Σ', $\Sigma' \in \mathcal{U}^K_{(p,q)}$, для которой $L(\Sigma') \leqslant (p+1)(q+1)L(\Sigma)$.*

Будем называть *однородной* любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа.

Представление КС Σ в виде объединения ее однородных подсхем без общих контактов будем называть *однородным разбиением* КС Σ.

Лемма 2.2. *Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей $(1,0)$- и $(0,1)$-самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответственно такие, что*

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma),\ L(\Sigma'') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma).$$

Теорема 2.1. *Для $n = 1, 2, \ldots$ имеет место следующие асимптотические равенства* $L^K_{(1,0)}(n) \sim L^K_{(0,1)}(n) \sim \dfrac{2^n}{n}$.

Лемма 2.3. *Для $n = 1, 2, \ldots$ имеют место равенства*

$$L^{\mathrm{K}}_{(0,1)}\left(\ell_n\right) = L^{\mathrm{K}}_{(0,1)}\left(\overline{\ell}_n\right) = 4n.$$

4.5. Классы P и NP

Определение. Пусть алгоритм осуществляет преобразование $\varphi : A^* \to B^*$ слов в алфавите A в слова в алфавите B. Тогда этот алгоритм называется полиномиальным (или имеющим полиномиальную сложность), если существует полином $p(n)$ такой, что для любого натурального n время работы алгоритма на любом входном слове длины n не превосходит $p(n)$. (При этом можно считать, что все коэффициенты в $p(n)$ неотрицательны, то есть $p(n)$ возрастающая функция.)

Определение. Задачей распознавания называется любое отображение $\varphi : A^* \to \{$"да", "нет"$\}$.

С любой задачей распознавания φ можно связать язык $L_\varphi \subseteq A^*$ следующим образом: $\bar{a} \in L_\varphi \iff \varphi : \bar{a} \to$ "да". И обратно, любой язык можно рассматривать как задачу распознавания.

Определение. Класс P —это класс всех языков (задач распознавания), для каждого из которых существует распознающий алгоритм с полиномиальной сложностью.

Определение. Будем говорить, что язык $L_1 \subseteq A^*$ полиномиально сводится к языку $L_2 \subseteq B^*$, если существует полиномиальный алгоритм (например, машина Тьюринга) $\varphi : A^* \to B^*$, такой что $\varphi(\bar{a}) \in L_2 \iff \bar{a} \in L_1$.

Теорема 4.10. *Пусть $L_1 \subseteq A^*$, $L_2 \subseteq B^*$, $L_2 \in P$ и L_1 полиномиально сводится к L_2. Тогда $L_1 \in P$.*

Эта теорема позволяет получать полиномиальные алгоритмы для одних задач распознавания из имеющихся полиномиальных алгоритмов для других задач просто путем полиномиального сведения одних задач к другим.

К сожалению, для большинства задач, возникающих на практике, пока не известно, входят ли они в класс P, но почти все такие задачи оказываются в другом классе, который обозначают NP.

Определение. Язык $L \subseteq A^*$ (задача распознавания) входит в класс NP, если и только если существуют алфавит B, полином $q(n)$ и предикат $Q(x, y) : A^* \times B^* \to \{$"истина", "ложь"$\}$ такие, что $Q(x, y) \in P$ и для любого слова $\bar{a} \in A^*$ выполняется:

$$\bar{a} \in L \iff \exists \bar{b} \in B^*(|\bar{b}| \leqslant q(|\bar{a}|) \& Q(\bar{a}, \bar{b}))$$

(здесь $|\bar{a}|$ и $|\bar{b}|$ —длина слов $\bar{a}$ и $\bar{b}$).

Слово $\bar{b}$ называют сертификатом для слова $\bar{a}$, а алгоритм, распознающий предикат $Q(\bar{a}, \bar{b})$, — алгоритмом проверки сертификата. Таким образом, если $\bar{a} \in L$ (в задаче распознавания для входа $\bar{a}$ ответ "да"), то должно существовать быстрое подтверждение для этого, то есть должен существовать подтверждающий это сертификат $\bar{b}$ (небольшой длины) и быстрый способ подтвердить, что это действительно подходящий сертификат. Если же $\bar{a} \notin L$, то такого $\bar{b}$ просто не должно существовать. Таким образом, ответы "да" и "нет" здесь не симметричны. Заметим также, что для случая $\bar{a} \in L$ лишь утверждается существование сертификата $\bar{b}$, но ничего не говорится о сложности его нахождения (если в B имеется r букв и $|\bar{a}| = n$, то $|\bar{b}| \leqslant q(n)$ и число таких слов $\bar{b}$ не меньше, чем $r^{q(n)}$, то есть экспоненциально зависит от n).

Рассмотрим примеры языков из NP.

КЛИКА. *Вход:* любой неориентированный граф G [7] и натуральное число k.

Вопрос: Существует ли в графе G клика размера k, то есть k вершин таких, что любая пара из них соединена ребром?

Более строго, мы должны задать входной алфавит A и способ представления графов и числа k в этом алфавите. Можно, например, считать, что $A = \{0, 1, ;\}$ и граф задается матрицей смежности (из 0 и 1), которая затем выписывается в одно слово подряд по строкам матрицы с разделителем ; между строками матрицы. В конце после ; записывается k в двоичной системе.

Утверждение. *КЛИКА* $\in NP$.

ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ (ГЦ). *Вход:* любой неориентированный граф G.

Вопрос: Существует ли в графе G гамильтонов цикл, то есть цикл, проходящий через каждую вершину ровно 1 раз?

Утверждение. *ГЦ* $\in NP$.

Определение. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется булева формула вида $F(x_1, \ldots, x_m) = D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_k$, где для каждого $j : D_j = t_{j,1} \vee t_{j,2} \vee \ldots \vee t_{j,n_j}$ и все $t_{j,k}$ — либо переменные, либо отрицания переменных, причем каждая переменная встречается в одном D_j не более одного раза. Выражения D_j называют дизъюнктами, а составляющие их $t_{j,k}$ литералами.

ВЫПОЛНИМОСТЬ (ВЫП). *Вход:* любая формула F в виде КНФ.

Вопрос: существует ли набор переменных $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, на котором $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 1$ (выполнима ли F)?

Утверждение. *ВЫП* $\in NP$.

Еще раз обсудим вопрос о представлении входных данных. Мы не можем, например, включить в алфавит A произвольные переменные, так как их бесконечное число, а любая машина Тьюринга работает лишь с конечными алфавитами. Однако достаточно взять алфавит $A = \{x, 0, 1, \&, \vee, \rceil, (,)\}$ и переменную x_i записывать как x с идущим далее числом i, представленным в двоичной системе счисления. Обратим также внимание на то, что в определении задач распознавания на вход может поступить любое слово в заданном алфавите A. В задаче ВЫП многие такие слова не представляют КНФ. Предполагается, что ответом для таких входных слов является "нет". Аналогично понимаются и другие задачи (например, КЛИКА или ГЦ).

Теорема 4.11. $P \subseteq NP$.

4.6. Теорема Кука

Определение. Язык L (задача распознавания) называется NP-трудным, если любой язык L_1 из NP полиномиально сводится к L.

В соответствии с теоремой 4.10, если язык L является NP-трудным и $L \in P$, то $NP \subseteq P$ и, с учетом теоремы 4.11, $P = NP$. И обратно, если $P \neq NP$, то $L \notin P$. Таким образом, NP-трудность языка является косвенным свидетельством того, что $L \notin P$ (косвенным потому, что вероятно $P \neq NP$, но это пока не доказано и не опровергнуто).

Определение. Язык L (задача распознавания) называется NP-полным, если $L \in NP$ и L является NP-трудным.

Естественно возникает вопрос о том, существуют ли такие "универсальные" задачи в классе NP, к которым полиномиально сводятся все задачи из NP. Оказывается, что существуют. Первый результат такого рода был установлен С. Куком [12].

Теорема 4.12 (С. Кук). *Задача ВЫП (о выполнимости КНФ) является NP-полной.*

4.7. Сложность задач о выполнимости

Следующая теорема позволяет выводить NP-полноту одних задач из NP-полноты других задач.

Теорема 4.13. *Если L_1 — NP-трудный язык и L_1 полиномиально сводится к языку L_2, то L_2 — NP-трудный язык. Если при этом $L_2 \in NP$, то L_2 — NP-полный язык.*

Определение. КНФ, у которой в каждом дизъюнкте ровно 3 различных литерала, будем называть 3-КНФ.

Задача 3-выполнимость (**3-ВЫП**).

Входной алфавит тот же, что и в задаче ВЫП.

Вопрос: верно ли, что входное слово — это 3-КНФ, которая выполнима.

Утверждение. *3-ВЫП $\in NP$.*

Теорема 4.14. *Задача 3-ВЫП NP-полна.*

Определение. КНФ, у которой в каждом дизъюнкте не более 2 литералов, будем называть 2-КНФ.

Задача 2-выполнимость (**2-ВЫП**).

Входной алфавит тот же, что и в задаче ВЫП.

Вопрос: верно ли, что входное слово — это 2-КНФ, которая выполнима.

Теорема 4.15. *Для задачи 2-ВЫП существует алгоритм с полиномиальной сложностью (то есть 2-ВЫП $\in P$).*

4.8. Некоторые NP-полные задачи на графах

Теорема 4.16. *Задача КЛИКА является NP-полной.*

Доказательство. Покажем, что задача ВЫП полиномиально сводится к задаче КЛИКА. Для этого каждому слову $\bar{a}$ в алфавите языка ВЫП сопоставим пару $\varphi(\bar{a}) = (G, k)$, где G — некоторый граф и k — натуральное число, так, чтобы в G существовала клика с k вершинами

Задача о независимом множестве вершин (**НМ**).

Вход: пара (G, k), где G — граф, k — натуральное число.

Вопрос: существуют ли в G k вершин, образующих независимое множество, то есть множество, в котором никакие вершины не соединены ребром в G?

Лемма 4.25. *$HM \in NP$.*

Задача о вершинном покрытии (**ВП**).

Вход: пара (G, k), где G — граф, k — натуральное число.

Вопрос: существует ли в G множество M из k вершин, образующих вершинное покрытие, то есть такое, что любое ребро из G имеет хотя бы один конец в M?

Лемма 4.26. *$ВП \in NP$.*

Теорема 4.17. *Задачи НМ и ВП NP-полны.*

Определение. Цикл в графе, проходящий через каждую вершину ровно 1 раз, называется *гамильтоновым циклом. Гамильтоновой цепью* называется незамкнутая цепь, проходящая через каждую вершину ровно 1 раз.

Задача о гамильтоновом цикле (**ГЦ**).

Вход: произвольный граф G.

Вопрос: есть ли в G гамильтонов цикл?

Лемма 4.27. *$ГЦ \in NP$.*

Теорема 4.18. *Задача ГЦ NP-полна.*